ПЕРЕВОДЫ

Дэвид Блур

Глава 6. Возможна ли альтернативная математика

Сама мысль, что в математике возможно многообразие*, подобное многообразию, существующему в социальной организации, представляется некоторым социологам чудовищной бессмыслицей [Stark 1958: 162]. Старк замечает: «Разумеется, наука о числах, тождественная самой себе по содержанию, может существовать только в единственном варианте».

Лишь некоторые авторы шли против такого очевидного факта, и среди них — Освальд Шпенглер, которого сегодня читают мало. В некогда популярной работе Шпенглера «Закат Европы» (Decline of the West, 1926) этому вопросу посвящена объемная глава «Значение числа» (The meaning of Number), увлекательно написанная, хотя содержание ее несколько туманно. Примечательно, что Шпенглер

Дэвид Блур — социолог, основатель сильной программы социологии знания, одна из ключевых фигур в социологическом конструктивизме и британской линии исследований науки и техники (science and technoloy strudies, STS). Профессор Эдинбургского университета.

Перевод выполнен по: Bloor D., Knowledge and Social Imagery, 1st edition, London, Routledge 1976.

* Блур использует слова variation и variety, отсылая одновременно к многообразию и к изменчивости когнитивных и социальных порядков. Здесь мы будем передавать это слово двумя обозначенными терминами (в зависимости от лингвистического контекста), отсылающими к одной идее: не существует единого и однообразного когнитивного порядка, который был бы санкционирован своей истинностью. Нет неизменной Математической Реальности, детерминирующей наше знание о ней. Напротив, когнитивные порядки настолько же изменчивы, как и наблюдаемые социальные порядки. Они потенциально многообразны. То, что мы приучены видеть единообразие математического знания, должно восприниматься не как факт, а как исследовательская проблема для социологии знания, требующая научного объяснения *(прим. ред.)*.

задается им в самом начале книги. Он с готовностью утверждает, что «числа как такового не существует и не может существовать. Существует несколько числовых миров, поскольку существует несколько культур» [Шпенглер 2009: 1, 59].

Как утверждают, Витгентштейн прочел книгу Шпенглера и она произвела на него впечатление [Janik, Toulmin 1973: 177]. Он также отстаивает позицию «чудовищной бессмыслицы» в написанном в социологическом стиле [sociologically oriented] труде «Замечания об основаниях математики» (Remarks on the Foundations of Mathematics, 1956). Возможно, по этой причине к книге обращаются относительно редко: философы, которые свободно ориентируются в прочих произведениях Витгентштейна, считают его подход к математике несвязанным и бессмысленным [ср. Bloor1973].

Чтобы ответить на вопрос, возможна ли альтернативная математика, важно поставить следующие вопросы: что она может собой представлять, по каким признакам мы можем ее распознать и что считать альтернативной математикой

На что альтернативная математика могла бы быть похожа?

Отчасти на этот вопрос несложно дать ответ. Альтернативная математика могла бы напоминать ошибку или вовсе быть несостоятельной. Настоящая альтернатива математике должна была бы вести нас путями, которые мы вряд ли выбрали бы по собственной воле. По меньшей мере некоторые методы и элементы в рассуждении должны были бы нарушать наши представления о логической и когнитивной правильности. Возможно, мы бы наблюдали, как делаются заключения, с которыми мы просто не согласны. Или бы видели, что в качестве доказательств результатов, с которыми мы согласны, приводятся факты, которые, кажется, ровным счетом ничего не доказывают. Мы могли бы в этом случае сказать, что альтернативная математика дает правильный ответ с неверным обоснованием. Или же, наоборот, мы заметили бы, что ясные и убедительные ходы рассуждений, убедительные с нашей точки зрения, отвергаются или игнорируются. Альтернативная математика также могла бы существовать в контексте целей и значений, которые абсолютно чужды нашей математике. Ее назначение едва ли было бы доступно нашему пониманию.

Несмотря на то, что альтернативная математика напоминала бы ошибку, не всякая ошибка могла бы стать основой для альтернативной математики. Некоторые ошибки лучше всего понимать как всего лишь незначительные отклонения от четкой линии [научного]

развития. Так, идиосинкразия современной школьной математики не создает реальной альтернативы. Для ее возникновения требуется нечто большее, чем просто ошибка.

Ошибки в альтернативной математики должны носить систематический, повторяющийся и основополагающий характер. Все, что нам кажется ошибкой, представлялось бы тем, кто практикует альтернативную математику, когерентным и осмысленным. У них было бы общее представление о том, как реагировать на «ошибки», развивать их, интерпретировать и как передавать подобный стиль мышления следующим поколениям. Они делали бы то, что казалось им естественным и убедительным.

Разумеется, повторяющиеся ошибки позволяют провести и другое различие между альтернативной и нашей математиками. Вместо связности и согласованности альтернативная математика характеризовалась бы отсутствием консенсуса [математиков]. Ведь для нас суть математики заключается именно в ее согласованности. Альтернативу составила бы математика, которой присуще разногласие. Ее последователям бы казалось, что нехватка консенсуса свойственна самой природе математической деятельности, подобно тому, как во многих областях религия рассматривается делом частной совести. Когнитивная толерантность могла бы стать математической добродетелью.

Набора перечисленных характеристик достаточно для текущих целей. Если бы некоторое явление им удовлетворяло, мы бы могли назвать его альтернативной математикой.

Здесь возможно возразить, что соответствие перечисленным условиям обнаружило бы лишь тот факт, что ошибка может носить систематический, повторяющийся и основополагающий характер. Не будут ли институционализированные ошибки такими же ошибочными, как и индивидуальные ошибки? Чтобы понять, как ответить на такое возражение, рассмотрим следующий вопрос: возможна ли альтернативная мораль? Представим, что вопрос ставится в эпоху абсолютной нравственной убежденности. Допустим, моральный кодекс считается данным от Бога. Четко понятно, что есть хорошо. Следовательно, любое отклонение ошибочно — о какой альтернативной морали может идти речь? Разве нравственная двойственность или неопределенность не попирают божественную природу?

Единственный ответ, который можно дать нравственному абсолютисту, заключается в следующем: альтернативная мораль — это такая мораль, при которой люди систематически принимают как должное то, что он считает греховным. Они вплетают греховное в образ жизни, который полагают должным, и передают его детям. Альтернативную мораль поэтому не следует приравнивать к пре-

ступному поведению в нашем обществе, так как сам по себе подобный образ жизни являлся бы нормой, несмотря на то, что мы обратили бы на него внимание потому, что он отличается от наших норм. Естественно, нравственный абсолютист отверг бы этот довод, заметив, что аморальность на уровне общества или нации все равно остается аморальностью. Институционализированный грех не перестает быть грехом; общества, как и люди, могут быть порочными.

Очевидно, что для целей научного исследования такая моральная установка должна быть замещена иным нравственным императивом: потребностью в беспристрастной и обобщенной перспективе. Благодаря ей антрополог сможет говорить об альтернативных системах морали при условии, что они приняты и укоренены в культуре. Именно такой характеристикой необходимо наделить математику, чтобы разговор об альтернативной математике имел смысл.

Кроме того, необходимо отметить еще один усложняющий ситуацию фактор. Мир по большей части не состоит из изолированных культур, которые независимо друг от друга развивают автономные моральные и когнитивные принципы. Культуры контактируют между собой и взаимопроникают. И насколько мир неоднороден в социальном аспекте, настолько же он неоднороден в познавательном и нравственном планах. И вновь математика, как и мораль, создается так, чтобы отвечать нуждам людей, у которых много общего как в физиологии, так и в материальном окружении. Это еще один фактор, который способствует единообразию и созданию общего контекста когнитивных и моральных принципов. Альтернативы в математике могут быть найдены лишь с учетом этих естественных ограничений.

Тем не менее единообразие и консенсус — там, где они имеют место, — могут объясняться причинно-следственными связями. Нет необходимости постулировать существование некоей Математической Реальности. Единственные реальности, к которым необходимо отсылать, полагаются в видоизмененной версии теории Милля* —

* Здесь Блур отсылает к аргументу, который он приводит в предыдущей, пятой главе. С его точки зрения, именно Милль заложил основы для натуралистического понимания математики: «Миллевская „Логика“ показала, что модели, по которым строятся математические аргументации, находят свою основу в физических ситуациях». Однако подход Милля был неполон: «Теория Милля не придает должного значения объективности математического знания. Она не выявляет его обязательный характер. Она не объясняет, почему математические выводы кажутся безальтернативными, будто бы они не могли быть иными». Чтобы объяснить логическую силу математического знания, Блур сводит ее к моральному авторитету («существует схожесть между логическим и моральным авторитетом»), тем самым вводя социальный компонент в «психологическую» теорию Милля: «Пси-

это природный и социальный миры. Вопрос, с которым имеет дело эмпирическая социальная наука, состоит в следующем: насколько наблюдаемые единообразие и изменчивость убеждений — каково бы ни было соотношение между ними — могут объясняться естественными причинами.

Я собираюсь привести примеры четырех типов многообразия в математической мысли, каждое из которых объясняется социальными причинами. К ним относятся: (I) многообразие в широком когнитивном стиле математики; (II) изменчивость математических ассоциаций, связей, аналогий и метафизических следствий, связываемых с математикой; (III) многообразие значений, связываемых с вычислениями и символическими преобразованиями; (IV) изменчивость точности и типов рассуждений, приводимых в качестве доказательств математических заключений. Пятый тип многообразия будет рассмотрен в следующей главе. Это многообразие в содержании и использовании базовых операций мышления, которые считаются самоочевидными логическими истинами.

В первых примерах, касающихся когнитивных стилей, аспекты древнегреческой и александрийской математики будут противопоставлены соответствующим элементам современной математики.

Является ли единица числом?

Следующие утверждения были общим местом в ранней греческой математике: единица не есть число; единица не является ни четной, ни нечетной, она четно-нечетная; двойка не является четным числом. В наши дни каждое из этих положений отвергается как неверное. Для нас единица — такое же число, как и все остальные. Фреге назвал бы его таковым в своих рассуждениях, не задумываясь. Более того, единица — нечетное число, двойка — четное, а такой категории, как четно-нечетные числа, просто не существует. Что же имели в виду греки?

хологическая теория Милля дорабатывается, таким образом, на основании социологического подхода. Психологический компонент отвечает за содержание математических идей, а социологический компонент — за отбор физических моделей и придание знанию ауры авторитета». Создается «видоизмененная теория Милля», в основании механики работы которой лежит две разведенных реальности, каждая из которых обладает своей каузальностью: природная реальность, из которой математики черпают образцы физических ситуаций для построения математических моделей, и социальная реальность, «работающая» на отбор и придание обязательного и объективного статуса математическому знанию *(прим. ред)*.

Причина, по которой греки утверждали, что единица не есть число, заключалась в том, что для них единица являлась исходной точкой или генератором чисел. Греки вкладывали в понятие числа такое же значение, как и мы, когда говорим, что некоторое число людей пришло на лекцию, имея в виду, что людей было больше одного. Аристотель предлагал собственную версию общепринятой точки зрения, когда утверждал в «Метафизике» [Уоррингтон 1956: 281]: «Единое означает меру некоторого множества, а число — измеренное множество и меры, взятые много раз. Поэтому также правильно сказать, что единое не есть число: ведь и мера — это не множество мер, и мера и единое — начало»[1].

Время от времени предпринимались попытки рассматривать единицу как число. Так, Хрисипп в III веке до н. э. говорил о «множественной единице». Ямвлих отвергал данное понятие в связи с его противоречивостью. Сэр Томас Хит приводит этот пример в работе «История греческой математики» [Heath 1921: 1, 69], указывая, что независимый взгляд Хрисиппа важен как «попытка включить единицу в концепцию числа». Иными словами, важно, что этот взгляд предвосхищает нашу точку зрения. Для нас этот пример скорее интересен в качестве иллюстрации к логическому заблуждению, в котором обвинял Хрисиппа Ямвлих. То, что Ямвлиху казалось заблуждением, мы принимаем как очевидное. Возможно, то, что мы отвергаем как логическую нелепость, может однажды стать самоочевидной истиной. Кажущаяся бессмыслица станет функцией подспудной классификации, которая принимается как должное. Нормативная раннегреческая классификация чисел, определенно, отличается от нашей. Поэтому нарушением порядка и связности, равно как заблуждениями и противоречиями, в них считаются разные вещи.

Отчасти греческая классификации похожа на нашу. Они также разделяли числа на четные и нечетные. Откуда тогда взялась мысль, что единица относится к классу «четно-нечетных»? Она объясняется тем, что единица производит как четные, так и нечетные числа, поэтому должна сочетать в себе природу тех и других. Единица находится по обе стороны дихотомии четности-нечетности и в то же время превосходит ее, являясь ее первопричиной и источником. Здесь можно провести некоторые антропологические параллели. Мифы о происхождении мира часто обращаются к событиям, выходящим за рамки категорий и классификаций, которые они объясняют. Говоря о сотворении мира, люди нередко отсылают к событиям, напоминающим инцест. Об этом свидетельствует и наш

1 Arist. Metaph. XIV, 1. Пер. цит. по: Аристотель. Метафизика. ЭКСМО, 2006.

собственный миф об Адаме и Еве. Единице также придается статус того, что преступает рамки категорий. Можно предположить, что для нее характерны и другие черты мифа, и такое предположение окажется верным.

В отдельных случаях двойка также лишалась статуса числа, считаясь генератором четных чисел. Однако подобная классификация была менее распространенной и не столь устойчивой, как представление о том, что числом не является единица.

Можно ли утверждать, что указанные явления единичны и их можно не рассматривать, полагая «софизмами» (как это делает [Van Der Waerden 1954])? Если цель заключается в том, чтобы максимально реконструировать греческую математику в современных терминах, то, действительно, проблема несущественна. С другой стороны, указанные различия в классификациях могут выступать симптомами чего-то более глубокого — расхождений когнитивных стилей греческой и современной математик. Такой точки зрения придерживается Яков Кляйн в сложной, но увлекательной работе «Греческая математическая мысль и происхождение алгебры» [Klein 1968].

Кляйн полагает ошибкой считать, что существовала единая и неразрывная традиция понимания смысла числа. Различия между Пифагором и Платоном, великими математиками XVI века Виетом и Стевином и нашими современниками не могут быть сведены к простому приросту знания. Кляйн говорит, что понятие числа не расширялось экстенсивным образом, включив сначала рациональные, затем действительные и, наконец, комплексные числа. Перемены затронули то, что он называет «интенцией» числа. Таким образом, Кляйн считает, что, когда математики Возрождения осваивали, скажем, труды александрийского математика Диофанта, они вместе с тем давали им свою интерпретацию. Преемственность, которую мы видим в математической традиции, — рукотворный продукт. Она происходит оттого, что мы переносим наш стиль мышления на проделанную ранее работу.

Различие между древней и современной концепцией числа состоит, по мнению Кляйна, в следующем: для древних число всегда было числом чего-то. Оно всегда указывало на определенное количество и соотносилось с некоторым набором сущностей. Ими могли быть как объекты, данные нам в ощущениях (такие как скот), так и чистые единства [pure units], постигаемые мышлением в отрыве от конкретных объектов. Кляйн утверждает, что такое понятие числа радикально отличается от представления, которое в настоящее время применяется в алгебраических расчетах. Сейчас, говорит Кляйн, число воспринимается скорее символически, чем как определенное количество вещей. Иногда непросто понять, что Кляйн

имеет в виду под «символическим», однако суть его утверждения ясна и имеет большое значение. Я попытаюсь передать точку зрения Кляйна на основе его анализа трудов Диофанта. Для максимальной ясности я приведу несколько простых примеров из работы александрийского математика. Они позаимствованы из перевода и комментариев Хита [Heath 1910].

Хотя главная работа Диофанта называется «Арифметика», несложно понять, почему ее принято считать трактатом по алгебре. Вот типичная задача из Диофанта — № 9 из Bk. II: «Представьте число, например 13, которое представляет собой сумму квадратов 4 и 9, как сумму двух других чисел, возведенных в квадрат». Далее Диофант говорит, что поскольку приведенные в задаче квадраты суть числа 2 и 3, возведенные во вторую степень, то в качестве искомых квадратов он возьмет $(x + 2)$ и $(mx — 3)$, возведенные во вторую степень, где $m = 2$. Таким образом, Диофант сводит задачу нахождения двух неизвестных квадратов к нахождению неизвестной величины. Для этого он соотносит два неизвестных и получает:

$(x + 2)^2 + (2x — 3)^2 = 13$, из чего следует $x = 8/5$,
тогда искомые квадраты 324/25 и 1/25.

Определенно, сегодня подобное вычисление относится к алгебре. Оно содержит неопределенную величину, для нахождения которой составляется и решается уравнение. Но едва современный читатель это понимает, как начинает замечать некоторые странности. Анализ работы Диофанта быстро обнаруживает различия между мышлением александрийского математика и ходом мысли, который стоит за современной элементарной алгеброй. Например, вся алгебра Диофанта заключается в поиске совершенно определенных чисел. Алгебраические расчеты не применяются с той же универсальностью, с какой применяем их мы. Они всегда подчинены числовым задачам. Так, в приведенном примере, чтобы найти два числа, удовлетворяющие заданным условиям, сделаны специфические допущения. Там, где вычисления дают то, что мы назвали бы отрицательными числами, Диофант отвергает условия задачи как невозможные или неверно сформулированные. Или, работая над задачей, которая может быть сведена [к решению] квадратного уравнения, он, как правило, находит лишь одно из двух подходящих решений, даже в тех случаях, когда оба положительны.

Рассмотрим другую задачу из «Арифметики», № 28 из Bk. II. Она тоже обнаруживает отличия от современного стиля мышления: «Найдите два квадрата, чтобы суммы их произведения и каждого из них были бы квадратами». В современном изложении Хит передает рассуждения Диофанта следующим образом: «Пусть x в ква-

драте и y в квадрате дают искомые числа. При этом они должны отвечать следующим условиям:

$x^2y^2 + y^2$ и $x^2y^2 + x^2$

должны быть квадратами. Тогда первое выражение будет квадратом в том случае, если x в квадрате плюс единица будет квадратом. Затем Диофант допускает, что данное выражение будет равно (x — 2) в квадрате, их чего x = ¾. Подставив это значение во второе уравнение, получаем:

$9 (y^2 + 1)/16$
должно быть квадратом. Отсюда Диофант заключает, что
$9 (y^2 + 1) = (3y — 4)^2$,
тогда y = 7/24. Тогда два искомых числа — это 9/16 и 49/576».

Эти рассуждения Диофанта показывают, что аргумент александрийского математика целиком подчинен задаче найти конкретные числовые значения. Однако главное состоит в том, что изложение Хита не в полной мере соответствует ходу мысли самого Диофанта. Это обновленная реконструкция, которая облекает рассуждения в форму, в значительной мере отличающуюся от оригинала. Хит ясно указывает на этот факт, в частности отмечая, что реконструкция начинается введением двух неизвестных — x и y. Он поясняет, что Диофант работает только с одним неизвестным, которое неизменно обозначается S. Таким образом, «мы можем сказать, что Диофант вычисляет неизвестные через одну переменную или как функцию от одной переменной» [Heath 1910: 52].

Этот пример помогает понять, что имел в виду Кляйн, утверждая, что современные мыслители систематически перетолковывают Диофанта. Обратите внимание, что Хит говорил о символе S как о «переменной». Это дает основание полагать, что реконструкция аргумента [Диофанта] свелась к его сокращению и упрощению. Вместо одной переменной Хит работает с двумя. Кляйн настаивает, что использованный Диофантом символ S вовсе не является переменной и считать его таковой значит неправильно толковать одну из базовых предпосылок греческой математики. С точки зрения греков S может соотноситься только с конкретным неизвестным числом. Переменные же в свою очередь не репрезентируют конкретные неизвестные числа. Само их название говорит о том, что они означают целый ряд величин, которые подчиняются некому правилу или закону.

Различия между переменной и неизвестным числом можно проиллюстрироватьпримером из школьного курса элементарной алгебры. В школе уравнения типа

$$y = x^2 + x - 6$$

представляются или, скорее, мыслятся как уравнения кривой. В приведенном примере кривая будет выглядеть, как на рисунке 5.

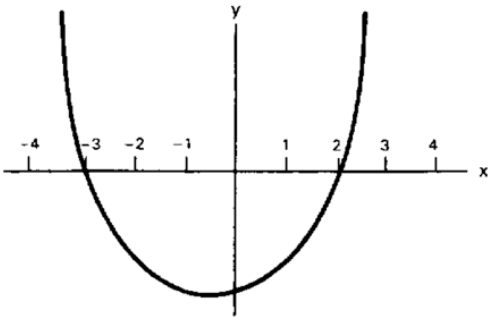


Рис. 5

С изменением значений x и y точка, удовлетворяющая решению уравнения, движется по кривой, как показано на графике. В данном случае x и y действительно являются переменными.

Диофант часто занимается разбором задач, которые могут быть описаны уравнениями, подобными вышеприведенному, но использует символ S вместо нашего x. Для нас решение уравнения дало бы два значения S, а именно +2 и -3. Последнее значение Диофант отверг бы как невозможное, а потому свел бы [правильное решение задачи] к единственной точке на указанном графике. Его интересовала бы точка, в которой кривая пересекает ось x с положительными значениями. Однако Диофант не рассматривал изолированное значение S = +2 лишь как одно из значений переменной S. Он живет вне контекста других возможных значений переменной, которые также были бы расположены на кривой*. Нет никакого двумерного пространства бумажного листа с графиком в форме кривой, отражаю-

* В оригинале Блур говорит следующее: «For him there is no context of surrounding values situated along a curve line». Буквально это означает, что для Диофанта очевидное для нас понимание переменной, укорененное в контексте современной математики, не существует. Он живет в ином когнитивном (и социальном) контексте, поэтому для него нет ни переменных, ни окружающих «правильное» решение значений *(прим. ред)*.

щей отношения внутри уравнения. Неизвестная точка, обозначенная символом S, совершенна и самодостаточна. Сети отношений, сконструированной вокруг нее нашей математикой, для Диофанта просто не существует.

Рассмотрим отрицательное значение S = –3, которое Диофант отверг бы [как несуществующее]. Для нас оно имеет непосредственное отношение к другому значению S = +2. Это точки взаимосвязаны, поскольку являются пересечением кривой, заданной уравнением, с осью абсцисс. Изымите интерпретативный аппарат, откажитесь от отрицательных чисел, и не останется ничего, что связало бы эти точки так, как они связаны для нас.

Самое сложное для нас — научиться не видеть то, что мы приучены видеть. Проблема в том, чтобы представить себе альтернативное, ограниченное видение, которое вовсе не является ограниченным, а соответствует миру [греков] столь же полно, насколько наше видение соответствует нашему миру.

Один из способов прочувствовать [sensing] иной подход к числам, соотносящийся скорее со счетом, чем с символами, — обратить внимание, сколь различны ожидания и интуиции, которыми руководствуются современные математики и Диофант. Ниже приведен блестящий отрывок из работы историка математики Хенкеля, который делится впечатлениями от чтения александрийского математика. Сначала Хенкель отмечает разнообразие типов задач, которые рассматривает Диофант, и отсутствие узнаваемого принципа их группировки. Далее он пишет:

> Еще более разнообразными, чем задачи, представляются их решения. Мы совершенно не способны дать хоть сколько-нибудь исчерпывающее описание ходов, которые совершает его рассуждение. У нашего автора невозможно выявить общих универсальных методов: каждый вопрос требует своего особого подхода, который не годится для решения даже самых похожих задач. Именно поэтому современному математику, изучившему диофантовы решения ста задач, трудно решить сто первую. И если мы попытаемся решить ее и после нескольких неудачных попыток заглянем в ответ Диофанта, мы изумимся, сколь внезапно он покидает проторенный путь ради проселочной дороги и быстрым маневром достигает цели. Зачастую это нас не удовлетворяет. Мы ждали, что нам придется взбираться по труднопроходимой тропе, но наградой в конце пути станет захватывающий вид. Вместо этого наш проводник ведет нас узкими, незнакомыми, но ровными тропками к незначительному холму; он закончил! Ему не хватает выдержки и концентрации,

чтобы погрузиться в решение единственного и важного вопроса; и вслед за ним читатель с внутренним беспокойством спешит от одной задачи к другой, словно играя в загадки, будучи не в состоянии насладиться каждой в отдельности. Диофант скорее поражает, чем восхищает. Он в высшей степени искусен, умен, находчив, неутомим, но не проникает глубоко и полно в суть. Создается впечатление, что его задачи не подчинены научной необходимости, а зачастую придуманы ради решения, при этом само решение не отличается ни полнотой, ни глубиной смысла. Он блестящий мастер в искусстве изобретенного им неопределенного анализа, но наука обязана ему — по крайней мере напрямую — лишь некоторыми методами в силу нехватки спекулятивного мышления, для которого Истина важнее Правильности. Вот общее впечатление, которое я получил от тщательного и неоднократного изучения арифметики Диофанта (цитируется по Хиту [Heath 1910: 54].

161 Важно, насколько легко мы понимаем реакцию Хенкеля, даже не будучи подкованными в математике. Он ярко и правдиво описывает свой опыт, который вполне типичен. Разве Хенкелю не удается передать ощущение, которое испытываешь при контакте с необычными моральными, политическими, эстетическими и социальными принципами? Разве это не похоже на опыт вхождения в незнакомую социальную группу? Наши ожидания всякий раз не оправдываются, наша способность предвидеть терпит фиаско, нужно сохранять бдительность, неожиданности подстерегают на каждом шагу. Нет непроблематичной предсказуемости типичных реакций: почему он сделал это, а она сказала то? Отчасти это может вызывать восхищение неординарностью продемонстрированных умений, отчасти — раздражение. Мы сталкиваемся с неспособностью видеть возможности, которые кажутся нам очевидными. Рассказ Хенкеля — феноменологическое свидетельство того, что работа Диофаната представляет собой математическое мышление, которое отлично от нашего — настолько, насколько чужая мораль или религия отлична от нашей морали или религии.

Идея, что число представляет собой число единств (units), а сама единица (unit) обладает особой природой, просуществовала до XVI столетия. Симон Стевин — математик из Голландии — поспособствовал изменению такого понимания. Некоторые моменты его аргументации интересны с социологической точки зрения.

Несмотря на то, что Стевин чувствовал, что необходимо оправдать перевод единицы в класс чисел, непохоже, что он пришел к этой мысли, опираясь на представленные доводы. Это аргумента-

ция постфактум, призванная защитить позицию, которая казалась очевидной. Кляйн приводит цитату, из которой следует, что Стевин вовсе не сомневался, что единица — это число: «Нет, конечно, нет, я был в этом уверен, как если бы сама природа сказала мне собственными устами» [Klein 1968: 191]. Эта идея, как можно заключить из сказанного, становилась сама собой разумеющейся, или «естественной», однако очевидное наличие разногласий требовало привести некоторые доводы. Аргумент Стевина состоял в том, что если число состоит из множества единиц, тогда единица должна быть частью числа. Часть должна обладать той же природой, что и целое, и, следовательно, единица — число. Отрицать это, говорил Стевин, все равно, что утверждать, будто кусок хлеба не есть сам хлеб.

Этот аргумент может вести к заключению, которое мы сегодня разделяем, однако он не отличается убедительностью. Требуется изначальное согласие с тем, что число является гомогенным и целостным, и это согласие предшествует допущению, что часть есть то же, что и целое. Стевин ясно показывает, что опирается именно на эти идеи. В действительности он говорит об аналогии между числом и длиной, размером, величиной. Таким образом: «Общность и сходство величины и числа столь универсальны, что почти позволяют говорить о тождественности» [Klein 1968: 194].

Новое понимание числа основывается на уподоблении числа линии, и именно эта аналогия прежде исключалась по причине приверженности дискретному счету. Сомнительно, что конфликт между новым и старым видением можно было бы уладить посредством развернутой аргументации. Все зависело бы от того, насколько допустимой представлялась базовая аналогия между числом и линией. Это в свою очередь отсылает к проблеме связи между арифметикой и геометрией и их относительной приоритетности.

Что же изменяет ощущение наличной связи между различными областями знания? Что делает приведенную Стевиным аналогию естественной для одного человека, но [проблематичной] для другого? Ответ должен быть следующим: прошлый опыт и текущие цели. И то, и другое необходимо рассматривать в социальном контексте с учетом естественных, психологических склонностей. Можно уловить, что стоит за этими фундаментальными математическими аналогиями, сравнив Стевина, который выступал за изменение классификации чисел, с теми, кто противостоял ему, цепляясь за греческую точку зрения.

Стевин был инженером. Все ведущие математики того времени занимались вопросами технологического или прикладного характера (ср. [Стронг 1966]). В силу практического склада они пользовались числами не только для счета, но и для измерения. Вероятно, именно практические задачи разрушили границы между геоме-

трией и арифметикой. Числа стали выполнять новую функцию, описывая особенности подвижных, активных процессов изменений. Так, число и система мер легли в основу интеллектуального освоения баллистики, навигации и применения машин.

Для тех, кто противился новым представлениям, нашептанным Стевину самой Природой, число по-прежнему сохраняло статичность. Число следовало понимать через классификацию. Важнейшими характеристиками представлялись те, которые позволяли причислить его к той или иной категории. Отношение числа к окружающему миру, безусловно, интересовало этих мыслителей, но зачастую они воспринимали его иначе, чем инженеры, или же считали, что число значительнее и выше, чем полагают более практичные люди. Число служило символическим воплощением порядка и иерархии Бытия. Оно обладало метафизической и теологической значимостью.

Стронг в работе «Процедура и метафизика» [Strong 1966] убедительно показывает, что существовало две группы [математиков], которые представляли научную и обскурантистскую партии. Кеплер, вероятно, был наиболее близок и тем, и другим. Недавние исследования акцентируют внимание на связи между группами и их позициями, предполагая, что практическая и мистическая точки зрения часто совмещались (см. [French 1972]). К чему бы ни привел исторический спор, ясно одно: существовала тесная связь между технологическим развитием XVI века и современным пониманием числа. Каковы бы ни был были предпосылки перехода от старого пониманию к новому, его общее направление требует объяснения, и работа Стронга дает основания предположить, что растущие технологические потребности представляют собой наиболее правдоподобную причину изменений.

Точка зрения, кратко описанная как мистическая, или нумерологическая, заслуживает более тщательного исследования. Она ляжет в основу второго примера многообразия математической мысли. Для начала кратко обрисуем математические концепции Пифагора и Платона.

Пифагорейское и платоновское число

Греки пользовались счетом для практических целей на рынке, но строго отделяли подобное использование чисел от высокого, интеллектуального созерцания их свойств. Очень приблизительно это можно сравнить с разведением «логистического» и «арифметического» (logistic and arithmetic), или практической и теоретической арифметиками. Разница между подходами к знанию о числах соответствует социальной дифференциации. В платоновском «Филебе» Сократ говорит: «Во-первых, об арифметике. Не следует ли одну ее

часть назвать искусством большинства, другую же — искусством философствующих?»[1]. Для Платона именно философы, те, кто любит мудрость, должны править в правильно устроенном обществе.

Теоретическое созерцание числа касалось свойства, которое именовалось «эйдос». Кляйн поясняет, что оно соответствует «типу» или «виду» числа, или, буквально, его «форме», «облику». Чтобы понять, каким образом число может приобретать форму или облик, следует вспомнить, что в данном случае речь идет исключительно о числе вещей, а числа вещей всегда можно представить в виде чисел точек. Эти точки зачастую можно организовать в характерные формы, такие как квадрат, треугольник или прямоугольник. Поэтому естественно говорить о квадратных, треугольных, прямоугольных числах и так далее, вплоть до трехмерных фигур при необходимости. Фреге, вероятно, подумал бы, что прямоугольное число — такая же бессмыслица, как прямоугольная концепция, однако идея очевидна, если взглянуть на рисунок ниже:



Рис. 6. Формы чисел. Квадратное число (9), треугольное число (6), прямоугольное число (8)

Категоризировав таким образом числа, можно изучать их свойства как формы. Например, следующие друг за другом треугольные числа при сложении дают квадрат. Греки использовали приспособление, которое называлось «гномон». Оно представляло собой число соответствующей формы, которое при сложении с одной из перечисленных выше форм не меняло бы изначальной конфигурации. Например, «гномон» квадрата должен был давать другой квадрат и, следовательно, выглядел следующим образом:

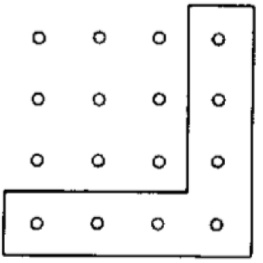


Рис. 7. Гномон квадратного числа

1 Пер. цит по. Платон. Собр. соч. в четырех томах. М.: «Мысль», 1994. Т. 3.

Если подсчитать точки в гномоне, можно выявить некоторые общие свойства таких конфигураций. Например, гномон квадрата представляет собой число в нечетнойпоследовательности 3, 5, 7,... Очевидно, что общее число точек любого квадрата будет равно сумме некоторой последовательности нечетных чисел. Таким образом, можно получить самые разнообразные, порой весьма изощренные результаты.

Первое, чем обращает на себя внимание такой подход к арифметике, — это то, насколько он соответствует объяснению Милля. Это исторический пример разработки знания о числах, основанного на наблюдении за объектами, которые подвергаются простому упорядочиванию и сортировке. Очевидно, некоторые из заключений греческой математики способны пересечь границы культур и эпох, поскольку в их основе лежит опыт, который может пережить каждый.

Второе наблюдение касается не универсальной, а специфической черты именно этой арифметики. Обратите внимание, как она выкристаллизовала некий элемент опыта — гномон — и обратила его в специальный инструмент исследования. Хотя с точки зрения нашей арифметики идея гномона совершенно понятна, для нас она не имеет особого значения. Естественно, в нашем существенно расширившемся знании есть концепты, которые играют сходную роль, хотя речь не идет о центральных и базовых операциях нашего математического мышления. Кляйн отмечает: «Конечно, операции с гномоном... имеют смысл только тогда, когда целью исследования является открытие разновидностей фигур и чисел» [Klein 1968: 56]. Современная математика и теория чисел отчасти занимаются разновидностями чисел, но их и близко нельзя сравнить с каталогизирующим подходом пифагорейцев и, позднее, платоников. Для них арифметика часто принимала форму естественной истории типов, видов и подвидов числовых форм.

Чем интересна такая форма теоретической арифметики? Дело в том, что в арифметике мыслители того времени видели схему классификации, которая символизировала общество, жизнь и природу. Ее упорядоченность и иерархичность заключали в себе единство космоса, устремлений и роли человека в нем. Различные типы чисел обозначали такие свойства, как Справедливость, Гармония и Бог. Классификация чисел резонировала с классификациями в повседневной мысли и жизни; их истинный смысл мысленно постигался через созерцание численной классификации. Это был способ установить интеллектуальный контакт с сущностями и потенциями, лежащими в основе порядка вещей. Подобную арифметику можно также рассматривать как своеобразную форму прикладной математики по причине тесной взаимосвязи с практическими вопросами.

На простейшем уровне метод установки соответствий между математикой и окружающим миром проявляется в том, как пифагорейцы, а позже и неоплатоники объединяют социальные, природные и числовые характеристики. Знаменитая Таблица противоположностей указывает на рядоположенность категорий:

Мужское/Женское
Свет/Тьма
Хорошо/Плохо
Нечетное/Четное
Квадратный/Прямоугольный и т. д.

В более сложных версиях пифагорейского учения специфические свойства чисел наделялись значением и в соответствии с ним изучались. Например, десятка связывалась со здоровьем и космическим порядком. Число не только символизировало космические силы, но и наделялось божественной силой или, как считалось, участвовало в божественных деяниях. Знание числа, таким образом, было средством ввести ум в ценные нравственные состояния силы и благодати.

Теперь можно представить, с каким сопротивлением столкнулись идеи Стевина. Отнестись к единице как к любому другому числу вовсе не было пустяком: это означало игнорировать или перечеркнуть [математические] смыслы и классификации, которые нарабатывались веками. Сложная система соответствий и аналогий, которая связывала числа между собой, оказалась бы спутанной. Стевин предлагал нивелировать и секуляризировать число. Числу грозила опасность утратить сложную иерархическую структуру и силу теологического символа.

Правильно ли вообще называть размышления пифагорейцев и неоплатоников математикой? Не лучше ли просто сказать, что некоторый действительно математический багаж был наработан случайно, следуя чужеродным спекулятивным и религиозным мотивам? Разумеется, Стевин представлял настоящую математику, а его оппоненты стояли на анти-антиматематических позициях. Они не занимались альтернативной математикой, скорее —вовсе ей не занимались. Как писал в похожем контексте Старк, «можно сказать, у них была такая же математика, как и у нас, только задавленная магией» [Stark 1958: 162].

Подобная реакция показывает, что наши размышления о математике не допускают компромиссов. В случае формального подхода, который требует однозначного выбора между альтернативами, может показаться, что математика не содержит значимых источников многообразия, которые нуждались бы в объяснении. Очевидно, что, если мы не принимаем числовой мистицизм как форму математи-

ки, он вообще не может рассматриваться в качестве альтернативы. Позволив себе деятельно перебрать и выделить в исторических примерах истинно математические компоненты и то, что никак к ним относиться не может, мы гарантируем вечное и самодостаточное единство математики. Оно обеспечится тем обстоятельством, что математика станет артефактом наших оценок.

Против формалистской позиции можно возражать следующим образом: утверждать, что альтернативной математики не существует, — тавтология. Формализм утверждает, что не существует «истинной» альтернативной математики, и при этом настаивает на своем праве диктовать, что считать истинным. Однако примеры красноречивее формальных возражений. Следующий пример позволит оспорить предпосылку, лежащую в основе бескомпромиссности формальной позиции: предпосылку, что возможно правильно постичь математику вне контекста принципов интерпретации, которые придают ей смысл. На пути социологии математики лежит убежденность, что математика обладает собственной жизнью и собственным значением. Это все равно, что предположить, будто существует истинный смысл, заключенный в символах, который ждет, что его [правильно] воспримут или поймут. Без этого предположения нет никакого исторического оправдания тому, чтобы решать, что считать правильной математикой. В ином случае не было бы оснований для ретроспективного отделения и выделения «истинной» математики.

Метафизика квадратного корня

Сегодня считается само собой разумеющимся, что квадратный корень из двух — это такое число, которое при умножении на самое себя дает в результате число 2. Данное число принято называть иррациональным — название сохранилось с тех времен, когда статус таких чисел вызывал сомнение. Причиной для сомнений был факт, о котором хорошо знал Аристотель: дробного числа p/q, значение которого было бы равным квадратному корню из двух, не существует.

В основе доказательства, предложенного Аристотелем, лежит следующая мысль. Допустим, что квадратный корень из двух равен некоему дробному числу p/q. Затем, положим, мы упрощаем эту дробь, сократив в числителе и знаменателе все общие множители. В частности, это значит, что мы не можем разделить ни p, ни q на два. Мы можем записать:

допустим $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

тогда $p^2 = 2q^2$

Это означает, что p в квадрате должно быть четным числом, так как оно равно числу, умноженному на 2, а именно числу 2q в квадрате. Но если p в квадрате является четным числом, то и p должно быть четным. А если p — четное, значит, q должно быть нечетным, так как было допущено, что дробь p/q была упрощена и все общие множители, в том числе и множитель 2, удалены. Если p — четное число, то его можно представить следующим образом:

$$p = 2n$$
тогда $p^2 = 4n^2 = 2q^2$
отсюда $q^2 = 2n^2$

Теперь последовательность аргументов, в ходе которых мы установили, что p — четное число, а q— нечетное, можно применить для q. Если q в квадрате равно 2n, то q в квадрате должно быть четным, а p — нечетным. Разумеется, это прямо противоположно тому заключению, к которому мы пришли ранее. Более того, всю последовательность шагов можно повторить механически. В результате получится, что p и q будут относиться то к разряду четных чисел, то нечетных, то снова четных, и т. д.

Как правило, вычисления прекращаются после первого перехода p из разряда четных чисел в разряд нечетных, так как это принято считать явным противоречием. Наличие этого противоречия означает, что одно из предположений данного рассуждения неверно, а единственное положение, которое вызывает сомнение, состоит в допущении того, что квадратный корень из двух можно представить как дробное число, типа p/q. Поэтому такое предположение отвергается.

Что означает эта последовательность расчетов и как она получает предписываемое ей значение? Служит ли расчет доказательством того, что квадратный корень из двух — иррациональное число? Строго говоря, вычисления показывают только то, что квадратный корень из двух не является рациональным числом, однако для нас это может значить лишь одно: если квадратный корень из двух не рациональное число, то он — иррациональное число. Однако для греков такие вычисления доказывали бы иное. Для них результат говорил бы о том, что квадратный корень из двух вообще не является числом. Такая серия математических расчетов была для них одной из причин, чтобы отделять все суждения, применимые к числам, от суждений, применимых к величинам. Например, геометрическая длина может быть равна квадратному корню из двух: такое значение имеет гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами, равными единице. Это говорит о том, какая пропасть разделяет геометрию и арифметику.

Что же тогда на самом деле доказывает это доказательство? Доказывает ли оно, что квадратный корень из двух не является числом или что он является иррациональным числом? Очевидно, ответ на этот вопрос зависит от фоновых представлений о числе, в рамках которых рассматриваются проводимые расчеты. Если под числом понимать счетное число, сумму или конфигурацию точек, то расчет будет иметь совершенно иное значение, чем в случае, когда число интуитивно смешивается с представлением о непрерывной линии.

Доказательство не имеет никакого «внутреннего» значения. Бессмысленно изучать его элементарные компоненты в надежде, что смысл обнаружится в знаках на бумаге или рутинной практике работы с символами. Этот факт тем более ясен, что расчеты образуют нескончаемую последовательность, которую можно повторять снова и снова. В самих расчетах нет ничего, что позволило бы остановить игру, где доказывается, что p и q — четные числа, потом нечетные и так до бесконечности.

Мы даже можем представить, как такой вариант исчислений приведет к мысли, будто он доказывает, что p и q четные и нечетные одновременно. Почему бы нет? Вообразим культуру, в которой людям удалось познать много важных вещей в арифметике, но при этом они не придавали большого значения категориям четности и нечетности. Они, возможно, применяли эти свойства в некоторых расчетах, но, положим, никогда не фиксировали подобное разделение или не придавали ему особой значимости. В этой культуре, например, людям бы в голову не пришло создавать Таблицу противоположностей, как это сделали пифагорейцы, не говоря уже о том, чтобы устанавливать соответствие между четным и нечетным сообразно космическим дихотомиям. Возможно, в отличие от пифагорейцев, им не кажется, что день и ночь, плохое и хорошее, черное и белое являются очевидными или важными противоположностями. В конце концов, день превращается в ночь, плохое — в хорошее, а черное — в белое. Предположим, мы говорим о нации посредников, тех, кто всегда ищет компромисс, смешивает и сочетает, чье мировоззрение и социальные условия делают акцент на комбинации различных вещей. Подобная космология могла быть понятной и весьма сложной. Расчет, который бы доказал, что числа бывают одновременно четные и нечетные, аккуратно и естественно укладывался бы в их представления и лишний раз свидетельствовал бы о том, что жесткие границы не существуют в реальности.

Смысл этого воображаемого примера такой же, что и в приведенном выше историческом случае. Чтобы расчет имел смысл, необходимо, чтобы предварительно были выполнены некоторые условия. Эти условия носят социальный характер в том смысле, что они основываются на коллективно поддерживаемой системе классификаций и зна-

чений данной культуры. Со временем они меняются, а с их изменением будут меняться и значения отдельных фрагментов арифметики.

Если конкретный смысл расчетов зависит от фоновых допущений, то и их общая действительность становится еще более контингентной. Открытие иррациональных величин часто называют «кризисом иррациональных чисел» в греческой математике. Кризис заключался в том, что предполагаемое открытием разделение величин и чисел противоречило прежней греческой тенденции представлять линии и формы в виде точек. (Поппер дает яркое описание этой космологии числового атомизма во второй главе работы «Догадки и опровержения» [Поппер 2004]. Открытие, возможно, привело к угасанию прежнего подхода, но это вовсе не означает, что он должен был исчезнуть. То, что считалось кризисом, могло стать злосчастной аномалией. Если бы те, кто поддерживал космологию, нашли новое выражение и применение своим базовым принципам, кризиса могло бы и не произойти. На его случайный характер указывает и тот факт, что спустя столетия числовой атомизм вновь лег в основу продуктивной [математической] работы. Например, французский математик XVII века Роберваль представил, что линия состоит из точек, и на этом основании стал использовать арифметические методы вроде сложения и округления, чтобы находить площади треугольников, объемов пирамид и суммы кубов, а также для более сложных расчетов. Он получил результаты, которые мы сегодня рассматриваем в качестве особых случаев интегрального исчисления (ср. [Boyer 1959: 142]). Будь Роберваль древним греком, возможно, ему бы удалось предотвратить кризис иррациональных чисел. Разумеется, теоремы о квадратном корне из двух в его работах не было.

Исчисление бесконечно малых величин — еще один схожий случай из области математических процедур, которые наделялись различной значимостью в разные времена. Это следующий пример, который мы рассмотрим. Он показывает метаморфозы стандартов строгости в математике.

Бесконечно малые числа

Иногда говорят, что «на самом деле» кривые состоят из маленьких прямых линий. Ясно, что сходство между плавной кривой и набором соединенных между собой отрезков может усиливаться по мере уменьшения длины и увеличения числа таких отрезков. Эта и сходные интуиции лежали в основе идеи бесконечно малых чисел и пределов. Вероятно, в пределе крошечные отрезки линий действительно станут неотличимыми от кривой (см. рис. 8). Долгая жизнь подобных идей достигла кульминации в дифференциальном и интегральном исчислении.

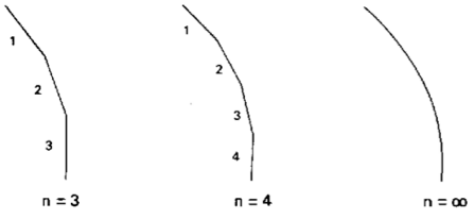


Рис. 8. Отрезки и пределы

Мыслить в терминах бесконечно малых величин все равно, что видеть площади и тела, как если бы они состояли из отрезков, кусков или элементов. Это позволяет интеллектуально познать формы, которые в противном случае было бы трудно представить.

История бесконечно малых чисел очень сложна, однако для настоящего рассуждения необходимо показать всего несколько общих моментов. В XVI–XVII веках использование бесконечно малых чисел широко распространилось в математической мысли. Одним из ведущих представителей направления был Кавальери (1598–1647). Оннедвусмысленно проводил аналогию между телом, которое состоит из бесконечного числа сегментов, и книгой, которая складывается из множества тонких страниц. Он также предполагал, что поверхность состоит из бесчисленного числа линий, подобно тому, как ткань состоит из нитей [Boyer 1959: 122].

Приблизительно в то же время бесконечно малые величины использует Уоллис (1616–1703) для выведения формулы площади треугольника. Представьте, что треугольник сложен из крошечных параллелограммов, толщина которых, как выразился Уоллис, «едва ли превышает линию» [Boyer 1959: 171]. Площадь каждого параллелограмма почти равна произведению его основания на высоту. Если мы вслед за Уоллисом допустим, что число таких сегментов бесконечно (∞), тогда высота каждого сегмента равна h/∞, где h — высота треугольника. Общая площадь равна сумме площадей параллелограммов. Площадь верхнего, находящегося в вершине, равна нулю — это просто точка. Последний сегмент будет иметь площадь b (h/∞), где b — длина основания и h/∞ — его бесконечно малая высота (см. рис. 9).

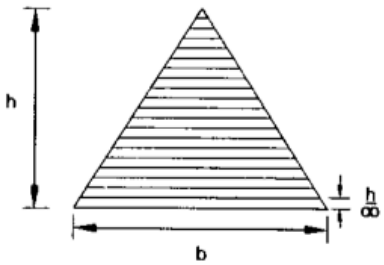


Рис. 9

Начиная с вершины, каждый последующий сегмент будет немного длиннее предыдущего за счет прибавления с каждым разом небольшого объема. Следовательно, длины всех параллелограммов от вершины к основанию образуют арифметическую прогрессию. Уоллис знал, что сумма членов арифметической прогрессии равна числу ее членов, умноженному на их среднее значение. Он не видел препятствий тому, чтобы использовать эту модельдля расчета площади бесконечной последовательности бесконечно малых сегментов. Таким образом, площадь треугольника выводилась из произведения следующих величин: средняя длина сегмента b/2, бесконечное число сегментов (∞), высота каждого сегмента h/∞. Отсюда следует:

$$\text{общая площадь} = \frac{b}{2} * \infty * \frac{h}{\infty}$$

Сократив бесконечные величины, получаем:

Общая площадь = ½ основания * высота

Многие другие столь же изобретательные ходы вызвали исследовательский бум и привели к новым результатам. Точный статус бесконечно малых чисел ни в коей мере не был согласован, но работа продолжалась. Почему, например, у Уоллиса значение 1/∞ не равно нулю? Как сумма элементов нулевого размера может дать конечную площадь треугольника? Некоторые мыслители, например Кавальери, сомневались в реальности бесконечно малых чисел. Другие, такие как Галилей, писали длинные философские трактаты в их защиту (ср. [Caruccio 1964: 200]).

Историки, рассматривая этот плодотворный период, порой отмечают недостаточную строгость в использовании бесконечно малых величин. Конечно, для современного математика термины, в которых ведет расчет Уоллис, не имеют строгого значения. В настоящее время ученые не видят ни смысла, ни возможности применять дроби ∞/∞ или сокращать бесконечные величины. С другой стороны, историки признают, что благодаря снижению стандартов строгости эти понятия впервые появились в расчетах. До этого они были запрещены; запрещены они и сейчас. Как говорит историк Бойер: «к счастью, людей, подобных Уоллису, не слишком беспокоила строгость» [Boyer 1959: 169].

Задолго до Уоллиса греческий мыслитель Архимед считал полезным дробить формы на составные фрагменты. С помощью этой и других, даже более механических, метафор он сумел математически описать сложные формы и фигуры. Например, Архимед представил, каким образом можно уравновесить сегменты фигур разной

формы. Ему удалось вывести уравнения, чтобы вычислить объем сферы, увязав ее с более простыми формами, такими как круг и конус (см. описание этого рассуждения у [Пойа 1975: I, 155]).

«Метод механических теорем» описан Архимедом в письме, где он указывает, что метод в действительности не подтверждает и не доказывает теорем, которые подразумевает («На самом деле я сам увидел многие вещи впервые с помощью механических средств, а затем представил их средствами геометрии; потому что исследование, проведенное таким образом, не является настоящим доказательством» [Caruccio 1964: 111]).

Настоящее доказательство для Архимеда должно быть геометрическим, а не основываться на механических метафорах дробления и уравновешивания. Геометрические доказательства должны были отвечать требованию не использовать актуально бесконечные величины. Снижение стандартов строгости в XVI веке связано с растущим убеждением, что прием, который Архимед считал простонапросто эвристическим, на самом деле имеет доказательную силу. Примечательно, что математики более позднего периода не знали о методе, которым Архимед искал свои решения. Они располагали лишь геометрической версией, с помощью которой оформлялось доказательство. Но она не давала ключа к мыслям и мотивам, стоявшим за ходом его рассуждений. Поэтому многие полагали, что Архимед пользовался в математике тайным методом (на самом деле так и было). Тайна, однако, носила характер исторической случайности: архимедовское объяснение собственного метода открыли только в 1906 году.

Мощный рост стандартов строгости, имевший место в математике XIX века, вновь привел к запрету на использование актуально бесконечных и бесконечно малых чисел, который существовал за много веков до этого в греческой мысли и исчез в XVI веке. Новые требования строгости реконструировали достижения таких людей, как Кавальери и Уоллис; кульминацией стало возникновение дифференциального и интегрального исчисления. Реконструкция вытеснила многие методы, благодаря которым были завоеваны эти достижения. Уоллисовское умножение на $1/\infty$ и сокращение знаков бесконечности в числителе и знаменателе дробей больше не допускались.

Подобные колебания стандартов строгости дают основание предположить, что в математике существуют два разнонаправленных фактора или процесса, которые друг другу противоречат или по меньшей мере сочетаются в различных пропорциях. В основе математики, которую мы связываем с дифференциальным и интегральным исчислением, лежала неизменная интуиция, что плавные кривые, формы и тела действительно можно представить

разделенными на сегменты. Именно к такой модели или метафоре часто приходили те, кто задумывался над данной темой. Конечно, математика не тождественна интуитивной мысли. Она подчинена дисциплине и [логическому] контролю. На этот неизменный фактор накладывались изменчивые стандарты доказательства и логической дисциплины, обусловленные свойственными эпохе представлениями о правильности. Архимед отбирал базовые механические интуиции при помощи геометрии. Она представлялась ему единственным выразительным средством, которое способно обеспечить должный логический контроль. Принцип отбора стал менее строгим в XVI веке. Интуиции получили возможность выражаться в более полной, метафорической форме. Разумеется, за это пришлось расплачиваться заблуждениями и расхождением во мнении. Значимость личной убежденности и творческого многообразия [математики] росла, но вместе с ней усиливалась угроза утратить определенность [доказательства] из-за несогласованности, непоследовательности и идиосинкразии.

Изменчивость в стандартах строгости подводятподводит нас к важному вопросу. Какие факторы определяют исторический баланс между общими, интуитивными пристрастиями и изменчивыми стандартами и стилями строгого контроля, которые на них налагаются? Вопрос относится не только к степени строгости контроля, но также и к его конкретной форме.

Эта проблема идентична той, которую сегодня энергично пытаются решить историки эмпирических наук. Общепринятые практики расчетов и математических преобразований, равно как и базовые интуиции относительно аналогий, моделей и метафор, можно рассматривать как эмпирические или экспериментальные аспекты математики. Они подобны получению данных из опытов и экспериментов в естественных науках. Принципы интерпретации, которые относятся к более высокому уровню и воплощают в себе смыслы, стандарты доказательства и строгости, могут быть соотнесены с объясняющими теориями, парадигмами, исследовательскими программами и метафизическими допущениями ученого-естественника. Нет никакого основания, которое заставило бы относиться к математике иначе, чем к эмпирическим наукам. Ниже мы остановимся на этом подробнее.

Заключение

Некоторые из представленных здесь случаев можно рассматривать как примеры математической мысли, альтернативной нашей. Демонстрируя разнообразие стилей, смыслов, ассоциаций и стан-

дартов неопровержимости, они ясно свидетельствуют о том, что в математической мысли существует многообразие, которое требует объяснения. Более того, можно допустить, что это многообразие объясняется социальными причинами.

Приведенные примеры также подтверждают (модифицированную) теорию Милля. Они показали, что математика основывается на опыте, однако этот опыт проходит отбор в соответствии с изменчивыми принципами и наделяется изменчивым значением, связями и сферой применения. В частности, эти примеры подкрепили идею, что часть опыта используется в качестве модели, которую затем применяют для решения широкого круга проблем. Особенно значимыми оказываются аналогическая и метафорическая экспансия [extension] таких моделей.

Изменчивость и многообразие математической мысли часто маскируются. Одна из маскирующих тактик уже была упомянута. Она состоит в бескомпромиссности, с которой делается утверждение, что стиль мышления только тогда заслуживает называться математикой, когда приближается к нашему собственному. Однако существуют и другие способы скрыть изменчивость, которые не столь очевидны. Часто их можно наблюдать в работах по истории математики.

Писать историю с необходимостью означает интерпретировать. Размышлениям и умозаключениям математиков прошлого нужно придать современный смысл и лоск, чтобы их поняли. Существуют разные способы этого достичь: сравнение и сопоставление; отделение ценного от того, что не имеет ценности; отделение значимого от незначимого; попытка найти систему и связность; интерпретация неясного и несвязного; заполнение пробелов и привлечение внимания к ошибкам; объяснение того, что мыслитель мог бы сделать, если бы у него было больше информации, проницательности или удачи, чем имелось у него в действительности; представление детального комментария, который реконструирует подспудные допущения и руководящие убеждения, и т. д. Этот аппарат научного комментария и интерпретации неизбежно опосредует наше восприятие прошлого. Это большой и всесторонний аппарат. Его размерам пропорционален и масштаб наложения ныне существующих стандартов и предубеждений на [события] прошлого. Безусловно, отчасти такое наложение является необходимой стороной понимания. Вопрос лишь в том, какие стандарты необходимо применить и какими задачами мы должны руководствоваться, создавая представление о прошлом.

Если историк преследует цель указать на кумулятивный характер математики, интерпретативный аппарат позволит ему этого достичь. Контрпримеры, которые не соответствуют представле-

ниям, будут представлены как периоды медленного развития или отклонения в ошибочном, неверном направлении. Вместо демонстрации альтернативных вариантов задачей становится отделение зерен от плевел. И тогда, конечно, такой историк, как Кэджори [Cajori1919], писавший в одно время со Шпенглером, получит возможность заявить, что математика главным образом, — кумулятивная наука, ничто не утеряно и вклад прошлого сияет сегодня столь же ярко, как и вклад современной науки.

Несправедливо и слишком просто сказать, что в таких работах история фальсифицирована. Ни один из стандартов честности и целостности [integrity] или производства научного знания [scholary industry] не был нарушен. Наоборот, эти достоинства продемонстрированы в избытке и со всей очевидностью. Скорее, в этом случае следует сказать, что эти достоинства используются для защиты интересов общего прогрессистского видения, и именно такую позицию необходимо оспорить. Примеры, приведенные в этой главе, подтвердили предсказания натуралистического подхода[1]: внутри математики существуют неоднородность и изменчивость, также как существует неоднородность между математикой и не-математикой. Мы должны руководствоваться иными ценностями, если хотим пролить свет на эти положения, если хотим, чтобы к ним отнеслись как к проблемам, требующим объяснения. Одна из таких ценностей, например, — интерес к механике логического и математического мышления. Этот вопрос, очевидно, поднимался в дискуссии Фреге и Милля, и ему я посвящу следующую главу.

Перевод с англ. Елены Напреенко
Ред. Павел Степанцов

Библиография

1. *Аристотель 2006 — Аристотель. Метафизика. ЭКСМО, 2006.*
2. *Витгенштейн 1994 — Витгенштейн Л. Философские работы. Ч. II. Замечания по основаниям математики. Пер. Козловой М. С., Асеева Ю. А. — М.: 1994.*
3. *Пойа 1975 — Пойа Дж. Математика и правдоподобные рассуждения. Под ред. С. А. Яновской. Т. 2. — М., Наука, 1975.*
4. *Платон 1994 — Платон. Собр. соч. в четырех томах. М.:Мысль, 1994. Т. 3.*
5. *Поппер 2004-Поппер К. Предположения и опровержения. Рост научного знания. Пер. А. Никифорова, Г. Новичковой. АСТ, Ермак, 2004.*
6. *Шпенглер 2009 — Шпенглер О. Закат Европы. Т. 2. ЭКСМО, 2009.*

1 Речь идет о том, что с точки зрения натуралистического подхода единообразие математики невозможно в той же степени, что и единообразие моральных убеждений (см. главу 5 Knowledge and Social Imagery).

7. *Boyer 1959 — Boyer C. B. The History of the Calculus and its Conceptual Development. NY.: Dover Publication, 1959.*
8. *Bloor 1973— Bloor D. Wittgenstein and Mannheim on the Sociology of Mathematics // Studies in the history and philisophy of Science, vol. 4, no. 2. 1973. P. 173–191.*
9. *Boyer 1959 — Boyer C. B. The History of the Calculus and its Conceptual Development. NY.: Dover Publication, 1959.*
10. *Cajori 1919 — Cajori F. A History of Mathematics. New York: Macmillan, 1919.*
11. *Caruccio 1964 — Caruccio E. Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought. L.: Faber & Faber, 1964.*
12. *French 1972 — French P. John Dee. L.: Routledge & Kegan Paul, 1972.*
13. *Heath 1910 — Heath T. Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra. Cambridge, CUP, 1910.*
14. *Heath 1921 — Heath T. A History of Greek Mathematcs, 2 vols., Clarendon Press, Oxford, 1921.*
15. *Janik, Toulmin 1973 — Janik A. Toulmin S. Wittgenstein's Vienna. L.: Weidenfeld & Nicolson, 1973.*
16. *Klein 1968 — Klein J. Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra. Cambridge, Mass, The MIT Press, 1968.*
17. *Stark 1958 — Stark W. The Sociology of Knowledge. L.: Routledge & Kegan Paul, 1958.*
18. *Strong 1966 — Strong E. W. Procedures and Metaphysics. Hildersheim: Georg Olms, 1966.*
19. *Van Der Waerden 1954 — Van Der Waerden B. L. Science Awekening. Dresden, Noordhoof, Groningen, 1954*